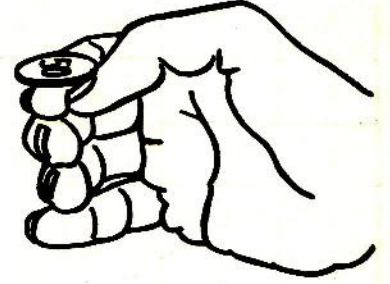


होशंगाबाद ज़िले की 16 शालाओं के विद्यार्थियों
और शिक्षकों के साथ एक संयुक्त प्रयास

संयोग और सम्भावना



चित्र 1

एक सिक्का लो और उसे ऐसे उछालो कि वह तेज़ी से चक्कर खाता हुआ ज़मीन पर गिरे (चित्र 1)। अगर गिरने पर अशोक स्तम्भ ऊपर हो तो उसे चित्त और अगर अंक वाली सतह ऊपर हो तो उसे पट्ट मानो।

एक सिक्के को कई बार उछालने पर

- (क) क्या चित्त व पट्ट बारी-बारी से आते हैं? यदि नहीं तो,
(ख) क्या चित्त व पट्ट की संख्याएँ बराबर होती हैं?

इन प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए आओ एक खेल खेलें और कुछ प्रयोग करें। पहले हम प्रश्न (ख) का उत्तर ढूँढ़ेंगे।

चित्त-पट्ट की दौड़

ज़मीन पर एक-एक कदम की दूरी पर ग्यारह लम्बी लकीरें खींच लो। तुम सब (कक्षा के सारे विद्यार्थी) एक-एक सिक्का लेकर बीच वाली लकीर पर पहली लकीर की तरफ मुँह करके खड़े हो जाओ। सब एक साथ अपने-अपने सिक्के उछालो। जिनका चित्त आए वे एक कदम आगे वाली लकीर पर और जिनका पट्ट वे एक कदम पीछे वाली लकीर पर चले जाएँ। इसी प्रकार अपने-अपने सिक्के उछालते जाओ और चित्त या पट्ट के अनुसार एक-एक कदम आगे या पीछे होते जाओ। जो भी सबसे पहले पहली या आखिरी लकीर पर पहुँचेगा, वह दौड़ में विजयी होगा। जब कोई जीत जाये तो अपनी जगहों से हटने से पहले अपनी-अपनी लकीर पर खड़े विद्यार्थियों की संख्या गिन लो। इन संख्याओं और लकीर के क्रमांक का एक स्तम्भालेख तैयार करो।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
प	प	प	चि	प	चि	प	प	प	प	2
चि	चि	चि	चि	चि	प	प	प	प	प	5
प	प	प	प	प	प	प	प	प	प	0
प	चि	प	चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	8
प	प	प	प	चि	चि	प	चि	चि	प	4
प	चि	प	चि	चि	प	प	चि	चि	प	5
प	प	चि	प	चि	प	प	प	प	प	2
प	चि	प	चि	चि	प	प	चि	चि	चि	6
चि	प	चि	प	चि	प	चि	प	चि	प	5
प	प	प	प	प	प	प	प	प	प	0
प	चि	चि	चि	प	प	चि	चि	चि	प	6
चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	प	प	8
चि	प	प	प	चि	प	प	प	प	चि	3
प	चि	प	चि	चि	चि	प	चि	प	प	5
चि	प	प	चि	चि	प	प	प	प	चि	4
प	चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	प	8
चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	प	चि	प	8
चि	चि	चि	प	चि	चि	चि	चि	चि	चि	9
चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	चि	प	प	8
चि	चि	चि	चि	प	प	प	प	प	प	4

चित्र 2

प्रयोग-1 (प्रत्येक विद्यार्थी इस प्रयोग को अलग-अलग करे)

पहिले दिये तरीके से एक सिक्के को 200 बार उछालो व परिणामों (चित्त व पट्ट) को क्रमशः एक तालिका में लिखो। ऐसी तालिका चित्र 2 में दिखाई गई है जिसमें उदाहरण के लिए एक काल्पनिक प्रयोग के परिणाम अंकित हैं। पहली बार सिक्का उछालने के परिणाम को तालिका की पहली पंक्ति के पहले खाने में व दूसरी बार सिक्का उछालने के परिणाम को पहली पंक्ति के दूसरे खाने में लिख लो और ऐसी ही सिक्के को दस बार उछालने के परिणामों को पहली पंक्ति में क्रम से भरते जाओ। इसी प्रकार आगे के परिणामों को दूसरी, तीसरी, इत्यादि पंक्तियों में लिखते जाओ।

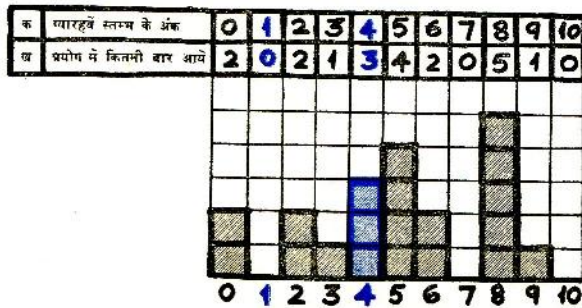
हरेक पंक्ति में चित्तों की संख्या गिन कर, पंक्ति के ग्यारहवें स्तम्भ में लिख दो। चित्र 2 में भी ऐसा ही किया गया है। अपने प्रयोग के आधार पर ऐसी तालिका तैयार करो और उसे देख कर बताओ,

क्या हर पंक्ति में चित्त व पट्ट की संख्या बराबर है? (1)

अगर चित्त व पट्ट की संख्या बराबर होती तो तुम्हारी तालिका के ग्यारहवें स्तम्भ में क्या अंक होते? (2)

क्या तुम्हारी तालिका के ग्यारहवें स्तम्भ में हमेशा एक ही अंक आया है? (3)

चित्र 2 में दी गई तालिका के ग्यारहवें स्तम्भ के अंक विभिन्न पंक्तियों में भिन्न-भिन्न हैं। उदाहरण के लिए अंक 4 तीन बार आता है और अंक 1 कभी नहीं आता। याद रखो कि यह तालिका काल्पनिक है व तुम्हारे प्रयोग में ऐसा होना जरूरी नहीं है। इस के आधार पर तुम एक और तालिका तैयार कर सकते हो और उससे एक स्तम्भालेख भी बना सकते हो जैसा कि चित्र 3 में दिखाया गया है।



चित्र 3

इसी तरह तुम अपनी तालिका में देखो कि उसके ग्यारहवें स्तम्भ में 0 कितनी बार आता है, 1 कितनी बार, 2 कितनी बार, इत्यादि..... और अपने अवलोकनों से चित्र 3 जैसी तालिका व स्तम्भालेख तैयार करो। यह स्तम्भालेख एक सिक्के को दस बार उछालने पर चित्तों की संख्या के वितरण को प्रदर्शित करता है।

तुम्हारे स्तम्भालेख का बहुसंख्यक मान क्या है? (4)

प्रयोग-2 (सारी कक्षा का सामूहिक प्रयोग)

अपने-अपने स्तम्भालेख को शिक्षक की मदद से एक दीवार पर लगा दो व उनको गौर से देखो।

क्या सभी स्तम्भालेख एक से हैं? (5)

क्या सभी विद्यार्थियों के बहुसम्मत मान बराबर हैं? (6)

अगर नहीं तो कितने विद्यार्थियों के बहुसम्मत मान तुम्हारे बहुसम्मत मान के बराबर हैं? (7)

क्या चित्र 3 का स्तम्भालेख किसी विद्यार्थी के स्तम्भालेख से मिलता है? (8)

क्या तुम्हारे विचार में चित्र 3 का स्तम्भालेख किसी वास्तविक प्रयोग के आधार पर बनाना सम्भव है? (9)

ग्यारहवें स्तम्भ के अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थी का नाम ↓	दूसरी पंक्ति के अंक										
राम लाल	2	0	2	1	3	4	2	0	5	1	0
वाल कृष्ण	0	1	1	2	5	4	2	2	2	1	0
शब्द											
.											
.											
.											
योग											

चित्र 4

प्रयोग-3 (सामूहिक प्रयोग)

प्रयोग 1 में तुम सबने चित्र 3 जैसी तालिकाएँ बनाई थीं। इन तालिकाओं में से ख पंक्ति के अंकों को चित्र 4 जैसी तालिका में भरो। इसके बाद प्रत्येक स्तम्भ के अंकों को जोड़ो। इस प्रकार प्राप्त अंकों से एक सामूहिक स्तम्भालेख बनाओ और इसका बहुसम्मत मान निकालो।

कितने विद्यार्थियों के बहुसम्मत मान इस सामूहिक बहुसम्मत मान से मिलते हैं? (10)

कितने विद्यार्थियों के बहुसम्मत मान सामूहिक बहुसम्मत मान से कम हैं और कितनों के ज्यादा? (11)

सामूहिक स्तम्भालेख और अपने स्तम्भालेख की तुलना करो और बताओ कि उनमें क्या समानताएँ और क्या असमानताएँ हैं? (12)

आओ अब प्रश्न (क) का उत्तर खोजने का प्रयत्न करें। क्या अभी तक किये गये प्रयोगों के आधार पर इस प्रश्न का उत्तर दिया जा सकता है? कक्षा में इस पर चर्चा करो।

इस प्रश्न का और गहराई से अध्ययन करने के लिए तुम्हें एक नये तरीके से पहले वाला प्रयोग करना होगा। अब एक सिक्के को दो-दो बार उछालो और यदि पहली बार चित्त आये तभी दूसरी बार उछालने का परिणाम चित्र 2 जैसी तालिका में भरओ। अगर एक बार चित्त आने पर अगली बार हमेशा पट्ट ही आता है तो तुम्हारी तालिका में सिर्फ पट्ट ही पट्ट होंगे। इस के अलावा यह भी हो सकता है कि चित्त के बाद पट्ट हमेशा तो नहीं आते पर प्रयोग 1,2 और 3 की अपेक्षा कुछ कम या ज्यादा बार आते हों, इस स्थिति में तुम्हें प्रयोग 3 से भिन्न प्रकार के परिणाम मिलने चाहियें। यदि प्रयोग के परिणाम भिन्न न हों तो तुम्हें मानना होगा कि पहली बार चित्त आने का दूसरी बार के परिणाम (चित्त व पट्ट) पर कोई असर नहीं पड़ता।

प्रयोग-4 (इस प्रयोग को दो विद्यार्थी मिल कर करें)

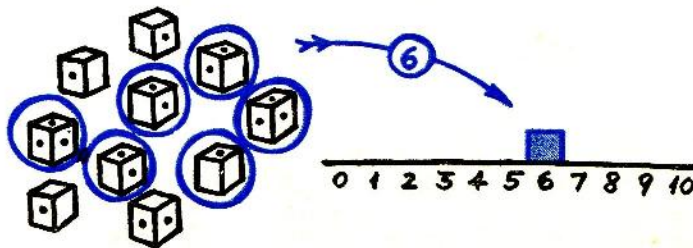
ऊपर के तरीके से चित्र 2 जैसी तालिका बनाओ और इन परिणामों के आधार पर प्रयोग 1,2 और 3 दोहराओ।

क्या इन प्रयोगों के स्तम्भालेख पिछले स्तम्भालेखों से भिन्न हैं? (13)

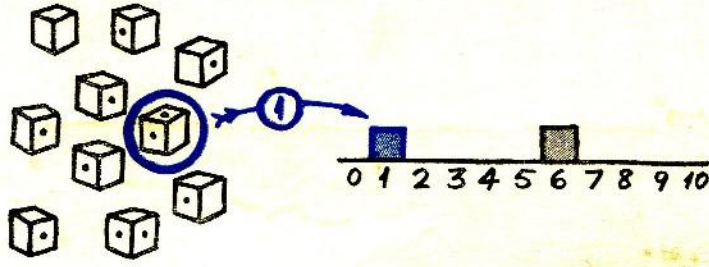
अगर इन दोनों प्रयोगों (3 व 4) के स्तम्भालेखों को एक-दूसरे के साथ मिला दें, तो क्या तुम इनको अलग-अलग कर सकते हो? कैसे? (14)

अगर तुम यह मान गये हो कि एक बार सिक्के के चित्त या पट्ट गिरने से उसके दूसरी बार के परिणाम पर कोई असर नहीं पड़ता, तो उछालने के क्रम को जानना व लिखना जरूरी नहीं है। इसीलिए यह भी जरूरी नहीं है कि दसों बार एक खास सिक्का उछाला जाए। इसलिए तुम एक सिक्के को दस बार उछालने की जगह एक साथ ही दस सिक्के उछाल सकते हो, व चित्तों की संख्या गिन कर चित्र 2 के ग्यारहवें स्तम्भ के अंक का निर्णय कर सकते हो। ऐसा करने से बिना कोई तालिका बनाए ही सीधे स्तम्भालेख तैयार कर सकते हो।

आगे के प्रयोग सिक्कों की जगह प्लास्टिक के गुटकों से किये जायेंगे। इन गुटकों की तीन सतहों पर एक रंग का बिन्दु लगाओ, व बाकी तीन सतहें खाली छोड़ दो। ऐसे दस गुटके तैयार करो। गुटकों को पासों की तरह चल कर फिर से प्रयोग 2 व 3 करो। गुटके को चलने पर बिन्दु ऊपर आये तो उसे चित्त व खाली सतह; ऊपर आये तो उसे पट्ट मानो। चित्र 5 में यह तरीका समझाया गया है।

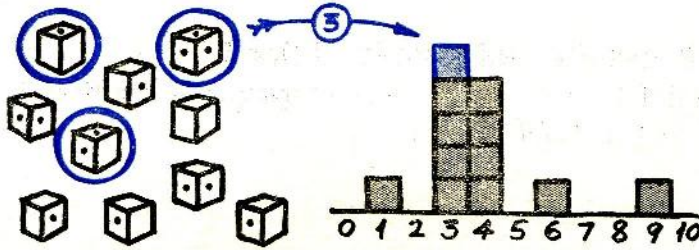


पहली चाल पर गुटकों व वर्ग की स्थिति



दूसरी चाल पर गुटकों व वर्गों की स्थिति

उसी क्रम की वारहवीं चाल



चित्र 5

प्रयोग-5 (दो विद्यार्थी मिल कर करें)

ऊपर बताए गए आसान तरीके से 200 क्रमों के परिणामों का एक स्तम्भालेख तैयार करो। फिर इनके आधार पर कक्षा का सामूहिक स्तम्भालेख भी बनाओ।

क्या इस प्रयोग के स्तम्भालेख प्रयोग 2 के स्तम्भालेख से मिलते हैं? (15)

यह स्तम्भालेख सबसे ऊँचा कहाँ है? (16)

इस स्तम्भालेख की ढलान सबसे अधिक कहाँ-कहाँ है? (17)

इस स्तम्भालेख में कौन-कौन से अंक अधिक बार आते हैं? (18)

तुम्हारे स्तम्भालेख की औसत क्या है? सामूहिक स्तम्भालेख की औसत क्या है? इन औसतों का क्या कोई अर्थ बता सकते हो? (19)

प्रयोग-6

दस नए गुटके तैयार करो, जिनकी छः में से केवल दो सतहों पर एक दूसरे रंग से बिन्दु लगे हों। इन गुटकों से प्रयोग 5 दोहराओ और चित्त आने की औसत निकालो।

क्या प्रयोग 5 और 6 की औसत भिन्न है? (20)

क्या इन औसतों का गुटकों पर लगे बिन्दुओं की संख्या से कोई सीधा सम्बन्ध प्रतीत होता है? (21)

यदि तुम्हें ऐसे गुटके दिए जायें जिनकी छः में से केवल एक सतह पर बिन्दु लगा हो तो औसत क्या आती? और अगर सभी सतहों पर बिन्दु लगे होते तो? (22)

प्रयोग-7

तुम गुटकों की जगह कौड़ियों या इमली के चियों से भी ऊपर का प्रयोग कर सकते हो। ऐसा करो और चित्तों की औसत संख्या पता करो।

प्रयोग-8

ऊपर के सभी प्रयोगों में तुमने दस गुटकों या सिक्के की दस चालों का उपयोग किया था। इसी तरह का प्रयोग तुम 20, 30, 40 व 50 गुटकों से भी कर सकते हो। इसके लिए क्रमशः 2, 3, 4 व 5 टोलियों के गुटके इकट्ठे कर के प्रयोग 5 दोहराओ। चित्तों की औसत संख्या व गुटकों की संख्या का एक आलेख बनाओ।

क्या गुटकों की संख्या और औसत में कोई सीधा सम्बन्ध दिखाई देता है? (23)

उपरोक्त औसतों को गुटकों की संख्याओं से भाग दे कर औसत चित्त-संख्या/गुटका निकालो। क्या यह संख्या गुटकों की संख्या घटाने-बढ़ाने से घटती-बढ़ती है? (24)

इस औसत चित्त-संख्या/गुटका को चित्त आने की सम्भावना कहते हैं।

सम्भावना का माप और घट-बढ़

प्रयोग 5 में 10 गुटकों की 200 चालें चल कर औसत चित्त संख्या निकाली थी और अन्त में औसत चित्त संख्या प्रति गुटका निकाल कर इसको सम्भावना का नाम दिया था। इस प्रयोग में 200 ही चालें क्यों ली गई थीं, क्या कम या ज्यादा नहीं ले सकते थे? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए इस संख्या को बदलते हुए एक और प्रयोग करना पड़ेगा।

प्रयोग-9 (चार विद्यार्थी मिल कर करें)

प्रयोग 5 की क्रिया को कम से कम बीस बार दोहराओ और हरेक चाल चलने के बाद स्तम्भालेख बनाने की जगह उस चाल तक की औसत चित्त संख्या निकालो। उदाहरण के लिए अगर शुरू के तीन क्रमों में क्रमशः 4, 7 व 3 चित्त आते हैं तो चित्र 6 जैसी तालिका में दिखाए गए तरीके से गणना करो। अब औसत और चालों की संख्या का एक आलेख बनाओ। इसे गौर से देखो और बताओ —

क्रम संख्या	चित्त संख्या	अब तक की कुल चित्त संख्या	औसत
1	4	4	$4/10 = 0.40$
2	7	11	$11/20 = 0.55$
3	3	14	$13/30 = 0.47$
.			
.			
.			
.			
20			

चित्र 6

क्या आलेख सीधा है या टेढ़ा-मेढ़ा ? (25)

क्या औसत बराबर रहती है या घटती-बढ़ती है ? (26)

अगर औसत घटती-बढ़ती है तो क्या इसकी घट-बढ़ हमेशा बराबर रहती है कि कहीं ज्यादा कहीं कम ? (27)

प्रयोग-10 (सामूहिक प्रयोग)

अपने प्रयोग 9 के आलेख पर सभी टोलियों के परिणाम अंकित करो व इनको भिन्न-भिन्न रेखाओं से जोड़ो।

क्या सभी आलेख एक से हैं ? (28)

क्या ये आलेख तुम्हारे लेखाचित्र के सारे हिस्से में फैले हैं या किसी एक भाग में भरे हुए हैं ? (29)

क्या तुम बता सकते हो कि 200 जैसी बड़ी संख्या क्यों चुनी गई थी ? (30)

क्या इससे बड़ी या छोटी संख्या चुनने का कोई फायदा सोच सकते हो ? (31)

अगर तुम्हें किसी प्रयोग में पता चलाना है कि सम्भावना $\frac{1}{2}$ है या $\frac{1}{3}$ है तो प्रयोग को कितनी बार दोहराना चाहिए। ध्यान रखो कि ऊपर की एक चाल में 10 गुटके होते हैं। (32)