कोण को मापे कौन?

यहाँ कोणों के दो बहुत कम चर्चित पहलुओं की चर्चा की गई है जो दो अलग-अलग क्षेत्रों से सम्बन्धित हैं। पहला हिस्सा, सीधे ही मापन की समस्याओं में जाता है और दूसरा हिस्सा कोणों को मापने के वैकल्पिक तरीकों की चर्चा करता है। तो पढ़ें इस आलेख को, ताकि आप अपनी कक्षा में कोणों को मापने की ऐतिहासिक ज़रूरत एवं वास्तविक जीवन में उनके उपयोग मात्र से कुछ अधिक की चर्चा कर सकें।

कोणों के औपचारिक अध्ययन के दौरान बच्चों को जो दिक्कत पेश आती है, उससे ऐसा लग सकता है कि कोण और रेखा के घुमाव के माप से छोटे बच्चों का परिचय नहीं करवाना चाहिए। लेकिन, शुरुआती बाल्यावस्था की गणित की पढ़ाई के लक्ष्यों के तौर पर इन्हें शामिल करने के जायज़ कारण भी हैं। पहला, बच्चे अनौपचारिक तौर पर कोण और घुमाव के माप की तुलना कर सकते हैं और वे ऐसा करते भी हैं। दूसरा, निहित रूप में ही सही किन्तु, कोण के आकार का इस्तेमाल आकृतियों के साथ काम करने में आवश्यक है। उदाहरण के लिए, जो बच्चे एक वर्ग और एक अवर्ग समचतुर्भुज में फर्क करते हैं, वे अपने सहज बोध के स्तर पर ही सही, लेकिन कोण के आकार के सम्बन्धों को पहचान रहे होते हैं। तीसरा, पूरी स्कूली शिक्षा के दौरान ज्यामिति में कोण का माप एक धुरी की भूमिका निभाता है और शुरुआत में ही इसकी नींव डालना पाठ्यचर्या का एक उपयुक्त लक्ष्य है। चौथा, शोध इस ओर इशारा करते हैं कि जहाँ प्रारम्भिक स्कूली शिक्षा के दौरान बहुत कम प्रतिशत में बच्चे कोणों को बखूबी सीख पाते हैं, वहीं छोटे बच्चे इन अवधारणाओं को सफलतापूर्वक सीख लेते हैं।

स्रोत: [1]

स्रोत [1] में और पढ़ने पर हम कोण के मापन में सीखने का मार्ग देख पाते हैं, जो अपने सहज बोध से कोण बनाने वाले बच्चे (2-3 वर्ष आयु) से शुरू होकर समझ के साथ कोण का उपयोग करने वाले (4-5 वर्ष), कोण का मिलान करने वाले (6 वर्ष), कोण के आकार की तुलना करने वाले (7 वर्ष) और कोण का माप करने वाले बच्चे (8+ वर्ष) तक जाता है।

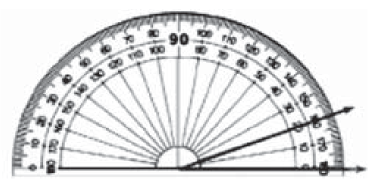
यह आलेख कोण के मापन पर केन्द्रित है, जिसे ऊपर बताए गए सीखने के क्रम के अनुसार तीसरी कक्षा में सिखाया जाना चाहिए, किन्तु

जो छात्रों के लिए अगले दो या तीन वर्षों तक भी मुश्किल बना रहता है।

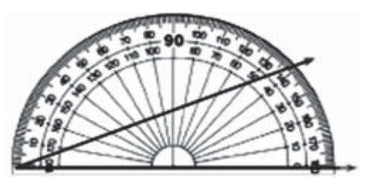
अधिकतर वयस्कों के लिए कोण कोई कठिनाई नहीं पेश करते हैं। किसी भी कोण का एक शीर्ष होता है और दो भुजाएँ होती हैं, जो एक निश्चित अंश (डिग्री) तक फैली होती हैं, जो कोण का 'माप' कहलाता है। इस अंश को चाँदा (प्रोटेक्टर) नाम के एक सरल उपकरण का उपयोग कर मापा जा सकता है। यह परिभाषा कई पाठ्यपुस्तकों में मौजूद है। यह तो इतनी सरल अवधारणा प्रतीत होती है कि यह कल्पना भी नहीं की जा सकती कि इसे समझने में किसी को कठिनाई होगी। अक्सर कार्यपुस्तिकाएँ एक या दो पन्नों में कोण का परिचय देती हैं और फौरन ही कोण के रेखाचित्र बनाने और मापन और कोण के हिस्सों को नाम देने की ओर बढ़ चलती हैं। लेकिन, ज़रा छात्रों से एक उल्टे शंकु का माप लेने को कहें – आप पाएँगे कि अधिकतर को चाँदा ठीक तरह से रखने में भी कठिनाई होगी। या फिर, भुजाओं की अलग-अलग लम्बाई वाले दो बराबर कोण दिखाकर पूछें कि इनमें से बड़ा कौन-सा है; अधिकतर उस कोण को बड़ा बताएँगे जिसकी भुजाओं की लम्बाई अधिक है। या फिर, चित्र-1 में दर्शाई गई स्थिति पर ध्यान दें, जहाँ छात्र को लगता है कि चाँदा पूरी आधार रेखा पर व्याप्त होना चाहिए।

ऐसी भ्रान्त धारणाएँ क्यों बनती हैं? क्या ऐसा इसलिए है क्योंकि हम शुरुआत से ही बच्चों के दिमाग को शीर्ष (vertex), रेखाखण्ड (line segment), किरण (ray) जैसी शब्दावली से भर देते हैं और मापन से जुड़े व्यावहारिक कार्यों को नज़रअन्दाज़ कर देते हैं? तो ज़रा उठाइए चाँदा और ध्यान से देखिए। इस पर बनी रेखाओं और चिह्नों (घड़ी की सुई की दिशा में व विपरीत [दक्षिणावर्त व वामावर्त]) और इस पर लिखी हुई संख्याओं के अम्बार के साथ इसे इस्तेमाल करना क्या वाकई इतना आसान है? सच कहें तो, यह किसी चमत्कार से कम नहीं है कि बच्चे इसका इस्तेमाल करना सीख जाते हैं!

इस आलेख में हम सीखने वाले



20° कोण...



...या 40° कोण?

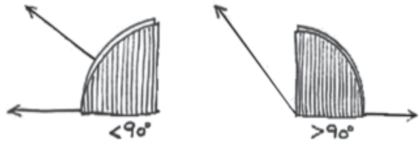
चित्र-1: 20° कोण या 40° कोण? कुछ छात्र इसे 40° कोण बताएँगे।

छोटे बच्चों का कोणों से परिचय करवाने के लिए कड़ी-दर-कड़ी कुछ सुझाव पेश करेंगे। यह इस विश्वास से प्रेरित है कि जो चीज़ बच्चों के ठोस संसार से सम्बन्धित होगी, उसका अधिगम परिणाम यानी सीखना कहीं बेहतर होगा।

कोणों के साथ खेल-खिलवाड़

कोणों को दो नज़रियों से परिभाषित किया गया है – एक बिन्दु से निकलती दो किरणों से बनी 'आकृति' के रूप में अथवा 'घूर्णन' या 'वर्तन' की तरह। कभी-कभी छात्र सोचते हैं कि ये अलग-अलग अवधारणाएँ हैं। कोणों से जुड़ी गतिविधियों में दोनों ही अभिप्रायों को शामिल करना चाहिए ताकि छात्र कोण शब्द के अन्तर्निहित अर्थ को समझ सकें।

कागज़ के एक वृत्त को चौथाई हिस्सों में तह करके (किनारे गोलाकार रहेंगे) शिक्षक यह दर्शा सकते हैं कि समकोण कैसे बनाया जाता है। छात्र इसे अलग-अलग कोणों की सीध में बिठाकर यह समझ सकते हैं कि दो कोणों की सही तरीके से तुलना कैसे की जाए (चित्र-2)। यह साधन चाँदे के एक शुरुआती रूप की तरह भी काम में लिया जा सकता है। इसी आकृति को मोड़कर या खोलकर छोटे या बड़े कोण बनाए जा सकते हैं। इसके बाद, 'न्यून' (acute) और 'अधिक' (obtuse)

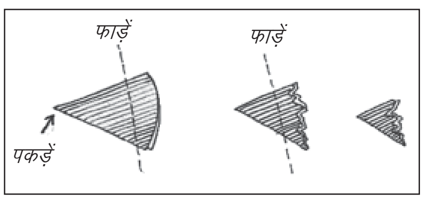


चित्र-2

शब्दों से परिचय करवाना तो महज़ सम्बन्ध बैठाने का काम है।

इस तह की हुई आकृति का एक रोचक उपयोग भुजा की लम्बाई के साथ कोण की अपरिवर्तनीयता को दर्शाने में किया जा सकता है; यह एक ऐसी अवधारणा है जिससे कभी-कभी उच्च प्राथमिक स्तर के छात्र भी जूझते पाए जाते हैं। कागज़ को शीर्ष से पकड़िए और फाड़ दीजिए (चित्र-3)। इति सिद्धम!

एक अन्य तरीका एक डोरी और दो स्ट्रॉ उपयोग करने का है (चित्र-4)। इसमें स्ट्रॉ को भुजाओं के साथ में आगे-पीछे करते हुए न केवल भुजा की लम्बाई से कोण की अपरिवर्तनीयता को दर्शाया जा सकता है, बल्कि शीर्ष दिखाई न देने के बावजूद महज़ 'कल्पना में' कोण बन जाने की धारणा को भी दर्शा सकते हैं। त्रिकोणमिति में 'ऊँचाइयाँ

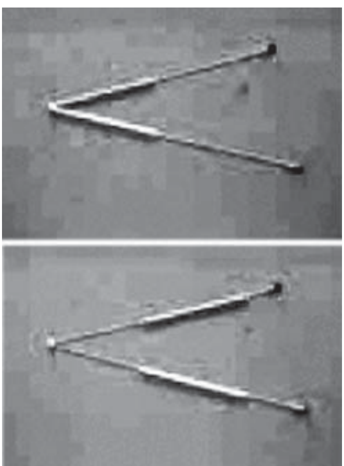


चित्र-3

एवं दूरियाँ’ विषय को पढ़ते हुए कक्षा 9 और 10 के छात्र इस समस्या का सामना करते हैं।

क्या आपकी कक्षा में ऐसे छात्र हैं जो गतिविधियों के ज़रिए बेहतर समझते हैं? यदि ऐसा है तो उन्हें कोण की धारणा का परिचय ‘कोण योगा’ के खेल से करवाइए। एक हाथ को स्थिर रखकर शून्य की स्थिति से शुरू करते हुए ‘सम कोण’, ‘न्यून’ और ‘अधिक’ पुकारिए और दूसरे हाथ को उसके अनुसार ले जाइए। जब बच्चे यह करते हैं तो उन्हें कई बातें समझ में आती हैं, उदाहरण के लिए, हाथों की लम्बाई अलग-अलग होने के बावजूद सभी बच्चे समान कोण प्रदर्शित कर सकते हैं; न्यून और अधिक कोणों के लिए कई सही कोण हो सकते हैं; स्थिर भुजा का आड़ा (क्षैतिज) या खड़ा (लम्बवत) होना आवश्यक नहीं है; कोणों की दिशा अलग-अलग हो सकती है। सबसे महत्वपूर्ण तो यह कि वे कोण बनाने के लिए अपने हाथों का उपयोग करके अन्दाज़ लगाने की कला सीखते हैं।

घूर्णन को मापने का एक रोचक तरीका कक्षा के दरवाज़े का इस्तेमाल है (चित्र-5)। शिक्षक ज़मीन पर 15-15° या 30-30° के अन्तराल पर 0° से 90° का कोण चिह्नित कर देते हैं। यह स्वयं सीखने का साधन बन जाता है; बच्चे इसके साथ अन्तर्क्रिया करते हुए सीखते हैं। हो सकता है कि उन्हें तुरन्त ही समझ में न आए कि अंश के चिह्न का क्या मतलब है या क्यों कहीं-कहीं चिह्न नहीं बनाए गए हैं। कुछ को यह जिज्ञासा भी हो सकती



चित्र-4

चित्र-5

है कि यदि दरवाज़ा और ज़्यादा खुले तो क्या हो: तब भला कोण का मापन कैसे किया जाए?

(इससे मुझे एक विचार आता है कि चाँदे को धातु की एक पतली पत्ती से क्यों नहीं बनाया जाता है, जो एक धुरी पर घूमे और 0° से 180° तक खुल जाए?)

इस पड़ाव पर *शीर्ष, रेखा खण्ड* और *किरण* जैसी शब्दावली से परिचय कराया जा सकता है। चूँकि छात्र इकाई की पुनरावृत्ति का उपयोग करके लम्बाई का माप करने से परिचित हैं, तो मापन की इकाई के रूप में अंश उनके लिए स्वीकार्य होना चाहिए। घूर्णन की अवधारणा को समझने में छात्रों के लिए जीओजेब्रा* (GeoGebra) एक बेहतरीन साधन हो सकता है।

कोणों को मापने के विभिन्न तरीके

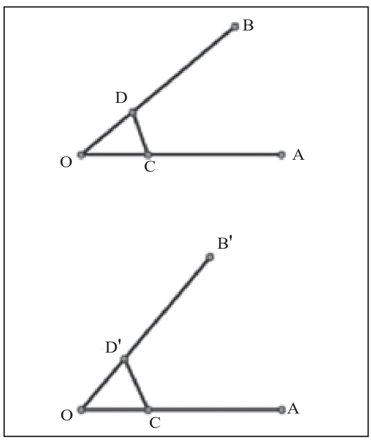
अब, जबकि छात्रों ने चाँदे का उपयोग करके कोण मापना सीख लिया है तो वे कोण मापने के अन्य तरीकों और उनके फायदे व नुकसान की जाँच-पड़ताल कर सकते हैं।

मुमकिन है कि प्राचीन ज्यामितिज्ञ भुजाओं के बीच एक निश्चित दूरी पर एक रेखीय खण्ड को जमाकर कोणों का माप करते हों? आइए, देखें कि इससे हम क्या पाते हैं।

माना कि, $\measuredangle AOB$ को मापने के लिए हम शीर्ष से 1 इकाई की दूरी पर, प्रत्येक भुजा पर क्रमशः बिन्दु C व D चिह्नित करते हैं, और खण्ड CD खींचते हैं। तब CD की लम्बाई $\measuredangle AOB$ का माप मानी जाएगी (चित्र-6)। हम इसे कोणों को मापने की **जीवा विधि** (chord method) कहते हैं।

जीवा विधि - कहाँ सफल

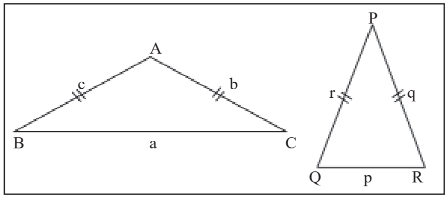
यह पद्धति *क्रम सम्बन्ध* (order relation) को बनाए रखती है और इसे जाँचा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, यदि $\measuredangle AOB < \measuredangle AOB'$ तो $CD < CD'$ होगा; और ऐसा ही इसके विपरीत भी होगा। यह देखने के लिए कि ऐसा



चित्र-6: यहाँ $OC = OD = OD'$. यदि $CD' > CD$ तो $\measuredangle AOB' > \measuredangle AOB$, और ऐसा ही इसके विपरीत भी होगा।

* *जियोजेब्रा ज्यामिति, बीजगणित, सांख्यिकी और कलन के लिए एक इंटरैक्टिव प्रोग्राम है, जिसका उद्देश्य प्राथमिक विद्यालय से विश्वविद्यालय स्तर तक गणित और विज्ञान को सीखना और सिखाना है। जियोजेब्रा डेस्कटॉप, टैबलेट और वेब ऐप्स के साथ-साथ कई प्लेटफॉर्म पर उपलब्ध है।*

क्यों है, हम यहाँ 'भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसम प्रमेय के असमान रूप' (हम केवल समद्विबाहु त्रिभुजों - isosceles triangles - पर लागू होने वाले रूप को ही लेंगे क्योंकि हमें केवल उसी की आवश्यकता है) को लागू करेंगे, जो यह कहती है (चित्र-7) : माना कि ΔABC और ΔPQR समद्विबाहु हैं, जहाँ $AB = AC = PQ = PR$ है। ऐसे में: यदि $\measuredangle P < \measuredangle A$, तो $QR < BC$; और यदि $QR < BC$ तो $\measuredangle P < \measuredangle A$. इसे विशुद्ध ज्यामिति का उपयोग करके साबित किया जा सकता है, लेकिन हम इसका प्रमाण आप पर छोड़ते हैं। हो सकता है कि कुछ पाठकों को आगे दिया गया त्रिकोणमितीय प्रमाण अधिक भाए।

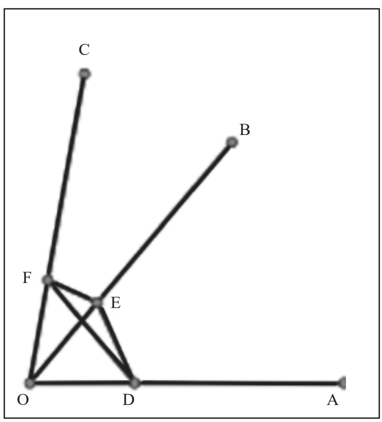


चित्र-7

एक समद्विभुज ΔABC में जहाँ $b = c$ हो, तो $a = 2b \sin A/2$ होगा। चूँकि b स्थिर है और $\sin x$ 0° से 90° तक के अन्तराल में x का एक बढ़ता हुआ फलन (increasing function) है, तो इस प्रकार जब $\measuredangle A$ 0° से 180° को बढ़ेगा तब a भी बढ़ेगा; और इसके विपरीत भी यही होगा। यही निष्कर्ष तब भी प्राप्त होगा यदि हम कोज्या (cosine) नियम का उपयोग करें, जो यह परिणाम देगा: $a^2 = 2b^2 (1 - \cos A)$, लेकिन अब हम इस तथ्य का उपयोग करते हैं कि $\cos x$ 0° से 180° तक के अन्तराल में x का एक घटता फलन (decreasing function) है।

जीवा विधि - कहाँ विफल

अतः कोणों को मापने की जीवा विधि क्रम सम्बन्ध को बनाए रखती है। किन्तु यह दूसरे परीक्षण में विफल साबित होती है, जो कि उतना ही महत्वपूर्ण है: *योज्यता* (additivity)। इसे देखने के लिए कि यह क्या है, आसन्न कोणों $\measuredangle AOB$ और $\measuredangle BOC$ के युग्म को लें, OB साझा भुजा है (चित्र-8)। चूँकि $\measuredangle AOC$ $\measuredangle AOB$ व $\measuredangle BOC$ का सम्मिलन है और उन दो कोणों के बीच कोई अतिव्यापन (overlap) नहीं है, तो यह मानना उचित ही होगा कि $\measuredangle AOC$ को $\measuredangle AOB$ व $\measuredangle BOC$ के माप के योग के बराबर होना चाहिए।



चित्र-8

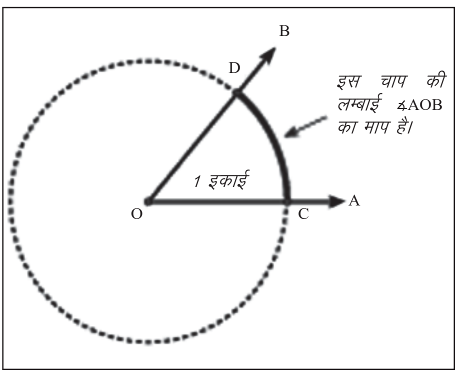
किन्तु, क्या यह अपेक्षा जीवा विधि पर खरी उतरती है?

माना कि OA, OB, OC किरणों पर D, E, F बिन्दु हैं, जो कि OD = OE = OF = 1 इकाई है। परिभाषा के अनुसार, ∡AOB, ∡BOC व ∡AOC की जीवा माप क्रमशः DE, EF व DF लम्बाइयाँ होंगीं। क्या यह सही है कि DE + EF = DF होगा? स्पष्ट है कि ऐसा नहीं है। दरअसल, हमें हमेशा DE + EF > DF प्राप्त होगा क्योंकि किसी भी त्रिभुज की दो भुजाएँ मिलकर तीसरी भुजा से बड़ी ही होंगी (यहाँ ΔDEF पर लागू)। अतः, ∡AOB व ∡BOC का योग ∡AOC से अधिक है। इस तार्किकता से हम पाते हैं कि किसी कोण का जीवा माप योज्यता के परीक्षण में विफल साबित होता है।

(नोट: उपर्युक्त तर्क यह मानकर किया गया है कि चित्र-8 में दर्शाए गए D, E, F एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं। लेकिन हम यह कैसे सुनिश्चित करें कि वे एक सरल रेखा पर स्थित नहीं हैं? यदि हम इसका कोई औचित्य प्रदान नहीं करते हैं तो हमने जो कहा है, वह अधूरा रह जाता है। पाठकों से आग्रह है कि इसका प्रमाण वे स्वयं प्राप्त करें।)

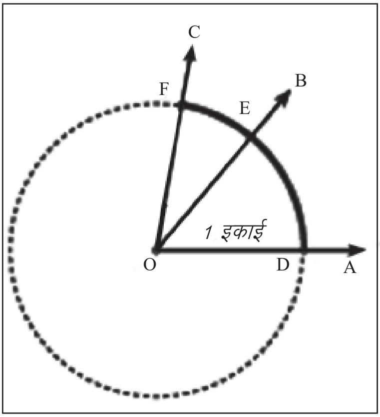
कोण मापने की चाप विधि

हमें नहीं पता कि प्राचीन ज्यामितिज्ञ कोण के मापन में जीवा की लम्बाई का उपयोग करते थे या नहीं। वे जो मापन विधि इस्तेमाल करते थे, वह वही है जो हम वर्तमान में उपयोग करते हैं और इसमें अपेक्षित दोनों ही गुणधर्म हैं – क्रम सम्बन्ध और योज्यता का गुण। यह **चाप की लम्बाई** (arc length) पर आधारित है। इसमें, दिए गए ∡AOB पर हम शीर्ष से 1 इकाई की दूरी पर, प्रत्येक भुजा पर क्रमशः बिन्दु C व D चिह्नित करते हैं और एक वृत्त बनाते हैं जिसका केन्द्र O है और जो C व D से होकर गुज़रता है। तब, चाप CD की लम्बाई ∡AOB का माप मानी जाती है (चित्र-9)।



चित्र-9

आइए, देखें कि यह परिभाषा योज्यता का क्या करती है। चित्र-10 में हम देखते हैं कि ∡AOB व ∡BOC की साझी भुजा OB है। जैसा कि चित्र-10 में दिखाया गया है, दोनों कोण एक-दूसरे पर अतिव्याप्त नहीं हैं। उनकी चाप का माप चाप DE व EF



चित्र-10

की लम्बाई है और ये दोनों ही उस वृत्त का हिस्सा हैं जिसकी त्रिज्या 1 इकाई है और जिसका केन्द्र O है। ∡AOC की चाप की माप इकलौते चाप DF की लम्बाई है। क्या चाप DF की लम्बाई चाप DE और EF की लम्बाइयों के योग के बराबर होगी? स्पष्ट है कि ऐसा ही होगा, क्योंकि सभी चाप एक ही वृत्त के हिस्से हैं और चाप DF ऐसी दो छोटी चापों का सम्मिलन ही तो है जो एक-दूसरे पर अतिव्यापन नहीं करती हैं।

जीवा माप की तुलना में किसी कोण का चाप से माप बहुत स्वाभाविक तो नहीं है, लेकिन और गहराई से अध्ययन करने पर हम इसकी सुगढ़ता और लाभों को पहचानने लगेंगे।

***

निष्कर्ष में हम कह सकते हैं कि परिभाषाओं का निर्माण, उनकी व्याख्या और उनमें कमियों या अन्तर की पहचान करना, यह सभी सीखने-सिखाने के अवसर हैं, जहाँ शिक्षक और छात्र बेहतर समझ बनाने के लिए मिलकर काम कर सकते हैं। जब हम परिभाषाओं को आज़माते हैं और उनकी अपर्याप्तता को देखते हैं, तब हम मौजूदा परिभाषाओं की किफायत और खूबसूरती को पहचानने लगते हैं।

आभार: यह आलेख विभिन्न मंचों पर कई गहन और दिलचस्प विचार-विमर्श का नतीजा है। अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के विश्वविद्यालय स्रोत केन्द्र में गणित की स्रोत व्यक्ति अनुपमा ने एक सेमीनार में 'कोण' पर पर्चा प्रस्तुत किया। इसके बाद ऑनलाइन 'मैथ लर्निंग ग्रुप' में एक सजीव बहस छिड़ी जो कोणों को लेकर छात्रों में व्याप्त भ्रान्तियों और शिक्षकों द्वारा उन्हें दूर करने के तरीकों पर केन्द्रित थी। 'मैथ लर्निंग ग्रुप' इस चर्चा में रवि सुब्रमण्यम (एच.बी.सी.एस.ई.), शैलेष शिराली (कोमैक), हृदयकान्त दीवान (विद्या भवन सोसायटी), रामचन्द्र कृष्णमूर्ति (अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय), राजवीर सांघा और ज्योति त्यागराजन के योगदान के लिए उनका आभार प्रकट करता है।

अँग्रेज़ी से अनुवाद: हिमालय तहसीन: स्वतंत्र अनुवादक एवं कॉपीएडिटर हैं।

यह लेख *एट राइट एंगल्स* के वॉल्यूम 2, नं. 2, जुलाई 2013 से साभार।

सन्दर्भ: [स्रोत:1] Learning and Teaching Early Math — The Learning Trajectories Approach Studies in Mathematical Thinking, by Clements and Sarama. (Publisher: Routledge; year: March 14, 2009)