सुन्दरम की छलनी के तीन चरण .....

चरण - 1

पहली पंक्ति 4 से शुरू होती है तथा किसी भी पंक्ति की पहली संख्या पिछली पंक्ति से 3 अधिक है। इसका मतलब है कि किसी पंक्ति m की पहली संख्या होगीः

$$4 + 3(m-1) = 4 + 3m - 3$$
$$= 3m + 1$$

पहली पंक्ति की लगातार दो संख्याओं का अन्तर 3 है और किसी अन्य पंक्ति की लगातार दो संख्याओं का अन्तर, उसके पहले वाली पंक्ति की लगातार दो संख्याओं के अन्तर से 2 ज़्यादा है। इसका मतलब किसी पंक्ति m की लगातार दो संख्याओं का अन्तर होगा-

$$3 + 2(m-1) = 2m + 1$$

अतः किसी पंक्ति m की nवीं संख्या उस पंक्ति की दो लगातार संख्याओं के अन्तर का $(n-1)$ गुना होगी। इसका मतलब m पंक्ति में nवीं संख्या होगी

$$3m + 1 + (n-1)(2m+1) = (2n+1)m + n$$

चरण - 2

चूँकि N इस जमावट की कोई संख्या है इसलिए किन्हीं m और n के लिए हम लिख सकते हैंः

$$N = (2n+1)m + n$$

हम इसका उपयोग $2N+1$ को m व n के रूप में व्यक्त करने के लिए कर सकते हैं।

$$2N + 1 = 2[(2n+1)m + n] + 1$$
$$= 2(2n+1)m + 2n + 1$$
$$= (2n+1)\,(2m+1)$$

चूँकि दोनों $(2n+1)$ तथा $(2m+1)$ एक से बड़ी पूर्णांक संख्याएँ हैं। उपरोक्त समीकरण से पता चलता है कि $(2N+1)$ के दो गुणनखण्ड हैं और दोनों एक से बड़े हैं। अतः यह अभाज्य संख्या नहीं हो सकती है। अतः यह सिद्ध हुआ कि $(2N+1)$ इस जमावट में है और यह अभाज्य संख्या नहीं है।

चरण - 3

पहले हम इस कथन को घुमा देते हैं जिसे हमने चरण-2 में सिद्ध किया। "यदि N इस जमावट में नहीं है तो $2N+1$ एक अभाज्य संख्या होगी।" अब इस कथन को लिख सकते हैं, "यदि $2N+1$ अभाज्य संख्या नहीं है तो N इस जमावट में ज़रूर होगा।"

हम इस दूसरे कथन को सिद्ध करेंगे।

माना $2N+1$ अभाज्य संख्या नहीं है इसलिए इसके कोई दो गुणनखण्ड a और b पूर्णांक होंगे। दोनों एक से बड़े हैं तथा $2N+1$ से छोटे होंगे। चूंकि $2N+1$ एक विषम संख्या है, इसलिए a और b विषम संख्या होगी। अतः किन्हीं पूर्णांक संख्याओं p और q के लिए, जो 1 के बराबर या उससे बड़ी है, हम लिख सकते हैं:

$a = 2p+1$ और $b = 2q+1$

अतः

$$2N+1 = ab = (2p+1)\,(2q+1)$$
$$= 2p(2q+1)+2q+1$$
$$= 4pq+2p+2q+1$$
$$2N = 4pq+2p+2q$$
$$N = 2pq+p+q$$
$$N = p(2q+1)+q$$

परन्तु यह तो p पंक्ति की q वीं संख्या है, इसका मतलब N इस जमावट में है। इस तरह यह कथन सिद्ध होता है।