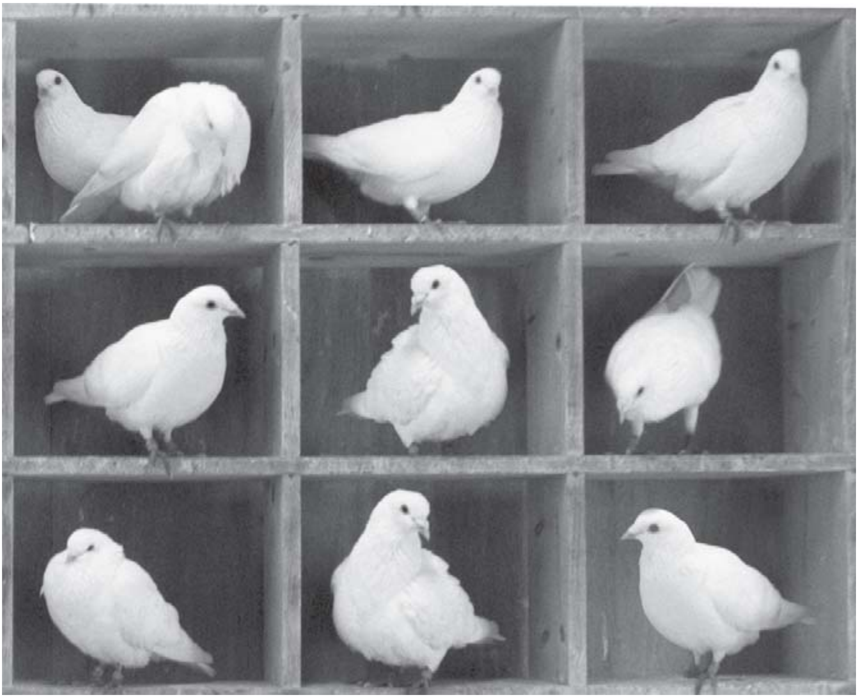
कबूतरखाने का सिद्धान्त

एस. श्रीनिवासन



अकसर गणित में और बाकी जगहों में भी, कुछ सरलतम अवलोकन बेहद रोचक परिणामों की ओर ले जाते हैं, और बहुत कठिन प्रतीत होने वाले कुछ प्रश्नों को हल करने में मदद कर सकते हैं। कबूतरखाने का सिद्धान्त ऐसा ही एक सिद्धान्त है।

यदि कोई आपसे निम्नलिखित बातों को प्रमाणित करने के लिए कहे, तो हो सकता है कि आप पहले थोड़ी-सी उलझन में पड़ जाएँ और अपना सिर खुजलाते रह जाएँ:

- भारत में कम से कम 27 लाख लोग ऐसे हैं जिनका जन्मदिन एक ही

होता है।

- यदि आप जानते कि भारत में मनुष्य के सिर पर 5 लाख से ज़्यादा बाल नहीं होते हैं तो हमारे भारत के चार महानगरों (प्रत्येक की जनसंख्या आधा करोड़ से ज़्यादा है) में से किसी में भी बाल वाले 10 लोग ऐसे होंगे जिनके सिरों पर बालों की संख्या समान होगी।
- लोगों के किसी भी समूह में, कम से कम दो ऐसे व्यक्ति होंगे जिनके मित्रों की संख्या समान होगी (या शत्रुओं की, यदि आप कहें तो)।
- किसी भी 6 लोगों के समूह में या तो आपस में 3 दोस्त होते हैं या आपस में 3 अजनबी।
- 3 की एक ऐसी घात है जिसके अन्त में 001 आता है।

कबूतरखाने के सिद्धान्त की वजह से इस लेख के अन्त तक पहुँचते-पहुँचते आपको इन सभी कथनों और ऐसे कई और कथनों को प्रमाणित करने में समर्थ हो जाना चाहिए।

कबूतरखाने का सिद्धान्त क्या है?

यदि आपके पास 10 कबूतर और 9 कबूतरखाने हैं, और आप इन कबूतरों को बेतरतीब ढंग से बाँटते हैं तो किसी एक कबूतरखाने में कम से कम दो या अधिक कबूतर आएँगे क्योंकि अगर आप एक खाने में एक कबूतर रखें तो इससे 9 कबूतरों का तो हिसाब हो जाएगा, फिर 10वें कबूतर को ऐसे खाने में जाना पड़ेगा जिसमें पहले से एक कबूतर मौजूद होगा। इतनी सहज और स्पष्ट बात को समझाने में भी संकोच होता है और आप ज़रूर कहेंगे कितनी मामूली बात है।

हम इस अवलोकन को एक आम सिद्धान्त की तरह इस प्रकार लिख सकते हैं: यदि m कबूतरखानों में m से ज़्यादा कबूतरों को रखा जाता है तो किसी कबूतरखाने में एक से ज़्यादा कबूतर होंगे। अर्थात् यदि n कबूतर हैं और m कबूतरखाने हैं तथा $n>m$ है, तो किसी एक कबूतरखाने में दो या अधिक कबूतर होंगे। हम इससे और भी ज़्यादा सटीक हो सकते हैं - किसी एक कबूतरखाने में n/m या उससे ज़्यादा कबूतर होंगे और चूँकि, कबूतरों को विभाजित नहीं किया जा सकता, अतः आप n/m के भाज्यफल को अगले उच्चतम पूर्णांक में बदल सकते हैं। अतः यदि आपके पास 100 कबूतर और 30 कबूतरखाने हैं तो किसी एक कबूतरखाने में कम-से-कम 4 कबूतर होंगे। (कृपया ध्यान दें कि हम यह नहीं कह रहे हैं कि प्रत्येक कबूतरखाने में आवश्यक रूप से 4 कबूतर ही होंगे या एक कबूतर तो होगा ही। क्योंकि आपको क्या मालूम कुछ कबूतरखानों में शून्य कबूतर भी हो सकते हैं)।

भारत में जन्मदिन

आइए, अब हम ऊपर दिए गए कथनों में से पहला लेते हैं: भारत में कम-से-कम 27 लाख लोग ऐसे हैं

जिनका जन्मदिन एक ही होता है। हम जानते हैं कि भारत की आबादी कम से कम 1 अरब है और केवल 366 जन्मदिन ही सम्भव हैं (फरवरी को भी 29 दिनों का गिनें तब)। हमारे 'कबूतरों' की संख्या n यहाँ पर 1 अरब है। हमारे 'कबूतरखानों' की संख्या m यहाँ 366 है। अतः n/m कम-से-कम 27 लाख होता है या आप और अधिक सटीक होना चाहते हैं तो यह संख्या होती है 27, 32, 240. 437....... यानी भारत में कम-से-कम 27 लाख, 32 हज़ार 241 व्यक्तियों का एक ही जन्मदिन होता है (कृपया ध्यान दें कि ऐसा कहने का मतलब यह नहीं है कि किसी भी दिए गए दिन, जैसे मान लें कि 14 नवम्बर के दिन भारत में कम-से-कम 27 लाख लोगों का जन्मदिन होगा। वह एक भिन्न सवाल है जिसमें सम्भावनाओं की गणनाएँ करनी होंगी। लेकिन यहाँ पर यह कह रहे हैं कि 366 दिनों में से एक दिन, जो हमें नहीं पता कि कौन-सा दिन होगा, हम आश्वासन दे सकते हैं कि कम-से-कम 27 लाख लोग अपना जन्मदिन मनाएँगे)।

अब आप यह दर्शा पाएँगे कि:

- 53 व्यक्तियों के एक समूह में कम-से-कम दो के जन्मदिन हर वर्ष एक ही हफ्ते में पड़ेंगे।
- 13 व्यक्तियों के एक समूह में कम-से-कम दो व्यक्तियों के जन्मदिन एक ही महीने में पड़ेंगे।
- 8 व्यक्तियों के एक समूह में कम-से-कम दो के जन्मदिन हफ्ते के एक ही दिन पर पड़ेंगे।
- 27 व्यक्तियों के किसी भी समूह में कम-से-कम किन्हीं दो व्यक्तियों का नाम अँग्रेज़ी के एक ही अक्षर से शुरू होगा।
- या 26 x 26 व्यक्तियों से ज़्यादा के किसी भी समूह में कम-से-कम दो व्यक्ति ऐसे होंगे जिनके पहले नामों और आखिरी नामों के प्रारम्भिक अक्षर दो समान अँग्रेज़ी के अक्षर होंगे।
- एक व्यस्त एयरपोर्ट पर प्रतिदिन

बतौर मदद यहाँ 12 महीने और 13 व्यक्तियों वाले तर्क को दिखाया गया है। कबूतर खाने के सिद्धाँत के अनुसार यहाँ महीने यानी खानों की संख्या और व्यक्ति यानी कबूतरों की संख्या दर्शाई गई है।

व्यक्ति 1	
व्यक्ति 2	☐ जनवरी
व्यक्ति 3	☐ फरवरी
व्यक्ति 4	☐ मार्च
व्यक्ति 5	☐ अप्रैल
व्यक्ति 6	☐ मई
व्यक्ति 7	☐ जून
व्यक्ति 8	☐ जुलाई
व्यक्ति 9	☐ अगस्त
व्यक्ति 10	☐ सितम्बर
व्यक्ति 11	☐ अक्टूबर
व्यक्ति 12	☐ नवम्बर
व्यक्ति 13	☐ दिसम्बर

1500 उड़ानें भरी जाती हैं या उतरती हैं। तो, कम-से-कम कोई दो हवाई जहाज़ एक मिनट के अन्दर आना-आना, आना-जाना या जाना-जाना करेंगे। (संकेतः 24 घण्टे के दिन में मिनिट कबूतरखाने हैं और हवाई जहाज़ कबूतर हैं)।

बालों की संख्या

आइए हम बाल वाले भारतीयों वाला दूसरा कथन लेते हैं। यहाँ पर हमारा n या 'कबूतर' की संख्या 50 लाख (या आधा करोड़) और 'कबूतरखाने' की संख्या m 5 लाख है। यानी इन चार महानगरों में बालों वाले लोगों के सिर पर 1 बाल, 2 बाल, 3 बाल आदि से लेकर अधिकतम 5,00,000 बाल तक हो सकते हैं। इसलिए हमें भरने के लिए 5,00,000 'कबूतरखाने' मिलते हैं। फिर से हम n को m से विभाजित करते हैं (n/m)

और हमें उत्तर मिल जाता है।

अब आप इस सवाल को आसानी से हल कर सकते हैंः एक जंगल में 1 करोड़ पेड़ हैं। प्रत्येक पेड़ में 4,00,000 से ज़्यादा पत्तियाँ नहीं हैं। तो जंगल में कम-से-कम 25 पेड़ ऐसे होंगे जिनमें पत्तियों की संख्या बिलकुल एक समान होगी।

मित्र, अजनबी और शत्रु

अब हम ऊपर दिए गए तीसरे सवाल पर आते हैं। पहले हम सिर्फ 5 का समूह लेकर सवाल को सरलीकृत करेंगे - इस प्रकार के प्रश्नों के लिए यह एक प्रस्तावित रणनीति है। यदि आपको कोई सवाल पेचीदा लगे तो कोई एक छोटी संख्या चुनें और देखें कि क्या आप उस कथन को प्रमाणित कर सकते हैं। हम यह सिद्ध करने की कोशिश करते हैंः 5 लोगों के किसी भी समूह में कम से कम 2 व्यक्ति ऐसे होंगे जिनके मित्रों की संख्या समान होगी।

तो चलिए हम उन पाँच व्यक्तियों के नाम रखते हैं A, B, C, D और E. ऐसे समूह में हमें दो उदाहरण मिल सकते हैंः हर व्यक्ति का कम से कम एक मित्र तो होता ही है; या कोई ऐसा है जिसका कोई मित्र नहीं है। हम मानते हैं कि मित्रता दोनों तरफ से होने वाली प्रक्रिया है - यदि मैं आपका मित्र हूँ तो आप मेरे मित्र हैं। और मैं अपना खुद का मित्र नहीं हो सकता यद्यपि मनोवैज्ञानिक इसका

सुझाव देते हैं! पहले मामले में: प्रत्येक व्यक्ति के 1 मित्र, 2 मित्र, 3 मित्र, 4 मित्र होंगे। मान लीजिए कि हम पहले सभी 4 व्यक्तियों, A से लेकर D तक, को इनमें से एक वर्ग (जो 'कबूतरखाने' हैं) में रखते हैं। अतः पाँचवे व्यक्ति E को आवश्यक रूप से 1 से 4 मित्रों वाले व्यक्तियों के चार वर्गों में से एक में होना पड़ेगा। यह हमारे कथन को प्रमाणित करता है कि 5 व्यक्तियों के एक समूह में कम से कम 2 व्यक्तियों के मित्रों की संख्या समान होगी।

दूसरे मामले में, 5 व्यक्तियों को फिर से 4 श्रेणियों में बाँटा जाता है और वे ऐसे व्यक्ति होंगे जिनके 0, 1, 2, या 3 मित्र होंगे (क्या आप बता सकते हैं कि इस प्रकार के समूह में जहाँ पर एक व्यक्ति का कोई मित्र नहीं है, वहाँ पर किसी व्यक्ति के चार मित्र क्यों नहीं हो सकते?)। फिर से कबूतरखानों की संख्या 4 है और कबूतरों की संख्या (व्यक्ति A से लेकर E तक) 5 है। इसलिए 5 व्यक्तियों के इस समूह में कम से कम 2 व्यक्तियों के मित्रों की संख्या समान होगी। किसी समूह में 5 व्यक्ति हों, 6 हों या उससे ज़्यादा, यह तर्क उन सब समूहों के लिए समान है (अगर ठीक-ठीक कहें तो व्यक्तियों की किसी भी संख्या के लिए जो 1 से अधिक हो)।

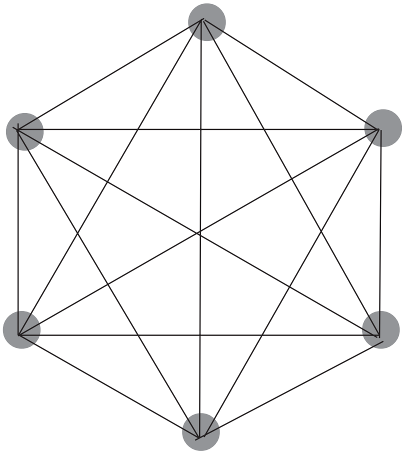
कृपया नोट करें कि यह तर्क ऐसे किन्हीं भी सम्बन्धों पर लागू होता है जो समरूप होते हैं: जैसे परस्पर अजनबी या परस्पर शत्रु आदि।

अब इसी प्रकार के तर्क के सहारे निम्नलिखित सवाल हल करना आसान होगा। किसी T-20 क्रिकेट प्रतियोगिता में सेमीफाइनल के पहले प्रत्येक टीम हर दूसरी टीम के साथ केवल एक बार खेलती है। प्रतियोगिता के दौरान किसी भी क्षण दो टीमें ऐसी होंगी जिन्होंने उस क्षण तक बराबर संख्या में मैच खेले होंगे।

"6 लोगों के किसी भी समूह में या तो कम-से-कम 3 परस्पर मित्र होते हैं या 3 परस्पर अजनबी"

पिछला कथन हल कर लेने के बाद यह कथन आसान दिखेगा। मान लीजिए, 6 लोगों में से एक काजोल है (फिल्म अभिनेत्री काजोल हो सकती है)। बचे हुए सभी 5 व्यक्ति या तो काजोल को जानते होंगे (5 'कबूतरों' और 2 'कबूतरखानों' का मामला) या नहीं। अतः 5 लोगों में से कम-से-कम 3 या तो काजोल के मित्र होंगे या ऐसे लोगों की श्रेणी में शामिल होंगे जिनकी काजोल से कोई जान-पहचान नहीं है।

आइए हम पहले 3 व्यक्तियों के उदाहरण को लेते हैं जो काजोल के मित्र हैं। यदि इन 3 व्यक्तियों में से 2 एक-दूसरे को जानते हैं, तो ये दोनों काजोल के साथ 3 लोगों का एक सहसमूह बनाते हैं जो परस्पर मित्र हैं। यदि तीनों में से कोई भी एक-दूसरे को नहीं जानता, तब हमें 3 लोगों का एक ऐसा सहसमूह मिलता है जो आपस में अजनबी है। यदि 3



में से 2 एक-दूसरे को नहीं जानते हैं: तब या तो उन 2 में से दोनों ही तीसरे व्यक्ति को नहीं जानते जिससे 3 परस्पर अजनबियों का समूह मिलता है; या फिर 2 व्यक्तियों में से एक तीसरे व्यक्ति को जानता है जो उसी प्रकार है जैसे 3 व्यक्तियों में से 2 व्यक्तियों का एक-दूसरे को जानना और इस प्रकार वे दोनों काजोल के साथ 3 परस्पर मित्रों का समूह बनाते हैं जैसा कि हम पहले देख चुके हैं।

इसी प्रकार हम उस स्थिति का तर्क प्रस्तुत करते हैं जब काजोल कम से कम 3 लोगों को नहीं जानती। और कृपया नोट करें कि यह तर्क और परिणाम, समूह में काजोल के मित्रों के नामों को वाकई में जानने पर आधारित नहीं है।

इस कथन को हल करने का एक और अधिक दृश्यात्मक तरीका यह है कि कागज़ की एक शीट पर छः लोगों को दर्शाने के लिए आप छः बिन्दु बनाएँ। उनके साथ 1 से 6 तक अंक लिख दें। प्रत्येक बिन्दु को पाँच अन्य बिन्दुओं से जोड़ें - इसका मतलब है 15 सीधी रेखाएँ खींचना (क्या आप बता सकते हैं कि 15 क्यों?)। उन्हें हरे रंग से जोड़ें यदि वे परस्पर मित्र हैं और लाल रंग से जोड़ें यदि वे अजनबी हैं। आप इसे बेतरतीब ढंग से यानी रेंडमली भी कर सकते हैं। अभ्यास के अन्त में प्रत्येक मामले में या तो आपको एक लाल त्रिभुज मिलेगा या हरा त्रिभुज। हरे त्रिभुज का मतलब है परस्पर मित्र व लाल त्रिभुज का मतलब है परस्पर अजनबी!

कुछ अंकगणितीय सवाल

आइए अन्तिम कथन को हल करने के पहले हम कुछ और उदाहरणों की चर्चा करें।

1) 11 अंकों के किसी भी समूह में आप ऐसे दो अंकों का चुनाव हमेशा कर सकते हैं जिनका अन्तर 10 से विभाज्य होता है।

विभाज्य का मतलब पूरी तरह से विभाज्य। इसे हल करने के लिए आपको ध्यान देना होगा कि जब कोई संख्या n से विभाजित की जाती है तो आपको 0 को मिलाकर n शेषफल मिल सकते हैं। जब आप 10 से विभाजित करते हैं तो आपको इन दस शेषफलों में से एक मिलता है- 0, 1, 2, 3.... 9। ये 10 शेषफल आपके कबूतरखाने हैं। ये

11 अंक कबूतर हैं। इससे पता चलता है कि 11 अंकों में से 2 अंकों के शेषफल समान होंगे। अतः उनका अन्तर 10 से पूर्णतः विभाजित होगा। उदाहरण के लिए यदि वे 2 संख्याएँ 64 और 34 हैं, तो उन्हें इस प्रकार लिखा जा सकता है: $64 = (6 \times 10) + 4$; और $34 = (3 \times 10) + 4$. उनका अन्तर है $30 = (6 - 3) \times 10$, यानी उनका अन्तर 10 से विभाजित होता है।

या सामान्यीकरण करने पर यदि हम 2 अंक n_1 और n_2 लेते हैं, जो m से विभाजित किए जाने पर एक ही शेष संख्या r देते हैं,

तो हमें मिलता है: $n_1 = q_1m + r$ और $n_2 = q_2m + r$, यहाँ पर q भागफल के लिए और r शेषफल के लिए इस्तेमाल किया गया है।

एक को दूसरे में से घटाने पर,

हमें मिलता है $n_1 - n_2 = (q_1 - q_2) \times m$ अर्थात् इनका अन्तर m से विभाजित किया जा सकता है।

इससे हम यह प्रमाणित कर सकते हैं कि $(n + 1)$ संख्याओं के किसी भी समूह से हम ऐसी दो संख्याएँ चुन सकते हैं जिनका अन्तर n से विभाज्य होता है।

यदि मैंने कबूतरखाने के सिद्धान्त के बारे में बताए बिना आपसे इस वाक्य को सिद्ध करने के लिए कहा होता तो सम्भवतः यही सुनने को मिलता कि आपने कॉलेज में गणित नहीं लिया था या कि आपने संख्या सिद्धान्त नहीं पढ़ा है।

2) 2 की 2 घातें ऐसी हैं जिनमें 2001 के एक गुणज बराबर अन्तर है

यद्यपि आपने पिछले कथन को हल किया है, आप यही सोचेंगे कि हे भगवान, अब इस कथन को हम कैसे हल करेंगे। 2 की 2002 घातें लीजिए। वे कोई भी 2002 घातें हो सकती हैं। वे 2^2 या 2^{5642} हो सकती हैं। ये 2002 घातें 2002 अंकों को दर्शाती हैं और 2001 से विभाजित होने पर कम से कम 2 अंकों का शेषफल समान होगा। चलिए मान लेते हैं कि ये दो संख्याएँ 2^m और 2^n हैं। ये पिछले कथन के समान ही 2001 से विभाज्य होंगी - यह उसी प्रकार है जैसे यह कहना कि 2 की इन दो घातों में 2001 के एक गुणज बराबर अन्तर है।

अब आप इन कथनों को हल करने की कोशिश कर सकते हैं:

- 2001 का कोई गुणज ऐसी संख्या है जिसके सभी अंक 0 और 1 हैं (संकेतः 2002 संख्याओं के ऐसे सिलसिले को लें, जैसे 1, 11, 111...)।
- 2001 का कोई गुणज केवल '1' द्वारा भी लिखा जा सकता है (संकेतः पिछले सवाल को आगे बढ़ाते हुए इसे हल कर सकते हैं)।
- अब आप दर्शा सकते हैं कि किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए n का एक ऐसा गुणज होता है जिसमें केवल अंक 3 और 0 होते हैं (संकेतः ऐसी $n + 1$ संख्याओं को लें जैसे 3,

33, 333...)।

3) 3 की एक ऐसी घात होती है जिसके अन्त में 001 आता है।

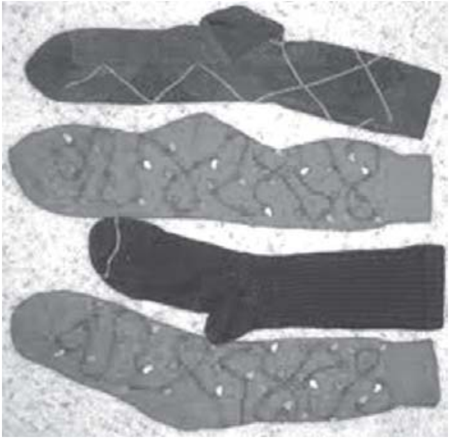
यह हमारी सूची में अन्तिम सवाल है। 3^m और 3^n लें - 3 की 2 ऐसी घातें जो 1000 से विभाजित किए जाने पर समान शेषफल देती हैं। उनके अन्तर को $3^m - 3^n = 3^n (3^{m-n} - 1)$ के रूप में लिखा जा सकता है और यह 1000 से विभाज्य होता है। 1000 के अविभाज्य गुणनखण्ड हैं 2 और 5 और इसलिए वे 3^n को विभाजित नहीं कर सकते। अतः $3^{m-n} - 1$ को 1000 से विभाजित होना ज़रूरी है जिसका मतलब है कि $(3^{m-n} - 1)$ 1000 का गुणज है। इसलिए 3^{m-n} जो 3 की एक घात है, के अंक ऐसे हैं जो 001 से अन्त होते हैं।

कबूतरखाने के सिद्धान्त की ताकत

आपको कुछ ऐसे प्रश्न दिखा चुकने के बाद जिन्हे कबूतरखाने के सिद्धान्त से हल किया जा सकता है, अब हम कुछ और ऐसे सवालों का उदाहरण देखते हैं जिन्हें कबूतरखाने के सिद्धान्त द्वारा हल किया जा सकता है - यह दिखाता है कि किस प्रकार एक सरल अवलोकन कितनी दूर तक जा सकता है और आपकी मदद कर सकता है। यह माना जा सकता है कि यह चुनाव लेखक की व्यक्तिगत सनक दर्शाता है। इनमें से अधिकांश सरल हैं - यदि आपने कबूतरखाने के सिद्धान्त को आत्मसात कर लिया है। केवल कुछेक में थोड़ी-सी और जानकारी की ज़रूरत होगी।

1) यदि आप 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से 5 पत्तों को चुनते हैं तो कम-से-कम दो पत्तों की छाप (या रंग) समान होगी।

2) आपके पास 2 रंगों के 10 जोड़ी मोज़े हैं - मान लीजिए, काले



और भूरे। मान लें कि बिजली जाने की वजह से अँधेरा हो गया और आपको जल्दी से एक जैसा जोड़ा बनाने के लिए मोज़े उठाना है। सही जोड़ा बनाने के लिए आपको कितने मोज़े उठाने की ज़रूरत होगी? (उत्तरः केवल 3 मोज़े)

3) एक कक्षा में 25 विद्यार्थी हैं। परीक्षा में उन्हें A, B या C ग्रेड मिलते हैं। उनकी किसी भी परीक्षा में कम-से-कम 9 विद्यार्थियों को समान ग्रेड मिलेंगे।

4) एक मण्डी में आमों की 25 पेटियाँ पहुँचाई जाती हैं। प्रत्येक पेटी में एक ही किस्म के आम हैं और ऐसी 3 सम्भावित किस्में हैं। यह सिद्ध करें कि इन पेटियों में कम-से-कम 9 पेटियाँ ऐसी हैं जिनमें एक ही किस्म के आम हैं।

5) यदि 12 कुर्सियों की एक पंक्ति में 9 लोग बैठे हैं, तो तीन लगातार कुर्सियों के कुछ समूह ऐसे होंगे जिन पर लोग बैठे हैं। (उत्तरः 3 खाली कुर्सियाँ, भरी कुर्सियों को, लगातार भरी कुर्सियों के 4 समूहों में बाँटती हैं। चूँकि 9/4>2, इसलिए किसी समूह में लोगों से भरी हुई कम से कम 3 कुर्सियाँ होंगी) या 12 एकदिवसीय मैचों की ृंखला में अगर कोई बल्लेबाज़ 9 शतक लगाता है तो उसे कम से कम 3 लगातार मैचों में 3 शतक बनाने ही होंगे।

6) एक समबाहु त्रिभुज, जिसकी सब भुजाओं की लम्बाई 1 है, में अन्दर चुने गए किन्हीं भी 5 बिन्दुओं में 1/2 से भी कम की दूरी पर हमेशा एक जोड़ा स्थित होता है (संकेतः एक समबाहु त्रिभुज को बराबर आकार के 4 छोटे समबाहु त्रिभुजों में उप-विभाजित करें; ये 4 समबाहु त्रिभुज 'कबूतरखाने' हैं)

7) 10 इकाइयों की त्रिज्या वाले एक गोलाकार डार्टबोर्ड पर 7 तीर फेंके जाते हैं। इनमें से हमेशा 2 तीर ऐसे होंगे जो कि एक-दूसरे से ज़्यादा-से-ज़्यादा 10 इकाई दूरी पर स्थित होंगे (संकेतः वृत्त को 6 बराबर खण्डों में विभाजित करें)।

8) सचिन के पास अगले विश्वकप की तैयारी के लिए 11 हफ्ते हैं। वह प्रतिदिन नेट पर कम से कम 1 घण्टे अभ्यास करना तय करता है। लेकिन खुद को थकान से बचाने के लिए वह तय करता है कि वह किसी भी हफ्ते के दौरान 12 घण्टों से ज़्यादा

अभ्यास नहीं करेगा। यह दिखाएँ कि लगातार दिनों का कोई ऐसा सिलसिला है जिसके दौरान मास्टर-ब्लास्टर ने नेट पर ठीक 21 घण्टों का अभ्यास कर लिया होगा।

9) यदि भिन्न a/b (b>0) को दशमलव अंक के रूप में दर्शाया जाए तो दशमलव या तो समाप्त होने वाला (terminating), या फिर अपने आपको अधिकतम (b - 1) लम्बाई के अन्तराल के साथ दोहराने वाला होता है।

10) पूर्णांकों $a_1, a_2 \ldots a_n$ की सूची में हमेशा ऐसे लगातार आने वाले अंक होते हैं जिनका योग n से विभाजित हो सकता है।

11) आँकड़ों का हानिरहित घनीभूतीकरण उसमें समाहित सारी फाइलों (इनपुट फाइल्स) के घनीभूतीकरण को सुनिश्चित नहीं कर सकता! इसे और गहराई से समझने के लिए [http://en.wikipedia.org/wiki/Lossless_data_compression] देखें।

एस. श्रीनिवासनः वडोदरा में सहज और लोकॉस्ट संस्थाओं की शुरुआत व संचालन में प्रमुख भूमिका। विज्ञान एवं गणित शिक्षण में विशेष रुचि।
अँग्रेज़ी से अनुवादः भरत त्रिपाठीः पत्रकारिता की पढ़ाई। स्वतंत्र लेखन और द्विभाषिक अनुवाद करते हैं। होशंगाबाद में निवास।

प्रस्तावित सन्दर्भ (लेख में दिए गए कुछ सवाल भी इन्हीं सन्दर्भों में से लिए गए हैं):

- डी. फोमिन, एस. जैनकिन, आई. आइटेनबर्ग. मैथेमैटिकल सर्कल्स (रशियन ऐक्सपीरियन्स)। यूनिवर्सिटी प्रेस, हैदराबाद, भारत, 1998.
- hhttp://www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml
